

III - Etude du développement de $I_n = \int_0^1 (1-x)^n f(x) dx$ $n \rightarrow +\infty$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

1°). On pose: $a_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ avec $p \geq 0, n \geq 0$ et $p^2 + n^2 > 0$.

a). Calculer: $a_{p,0}, a_{0,n}$, puis a_{p+1} et $a_{1,n}$.

b). Etablir, par intégration par parties, les récurrences suivantes:

$$a_{p,n} = \frac{p}{n+1} a_{p-1,n+1} \quad (p \geq 1) \text{ et } a_{p,n} = \frac{n}{p+1} a_{p+1,n-1} \quad (n \geq 1).$$

c). Exprimer $a_{p,n}$ en fonction de n, p et C_{n+p}^p ; montrer que quand $n \rightarrow +\infty$, p fixé $a_{p,n} \sim \frac{p!}{n^{p+1}}$ (il est inutile d'utiliser Stirling)

2°). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a). Etablir (très simplement) que $I_n \rightarrow 0$ $n \rightarrow +\infty$ et que:

$$I_n = \frac{f(0)}{n} (1 + \varepsilon_n) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

b). En utilisant la formule de MacLaurin à l'ordre $p+1$ établir que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p+1} \left[I_n - \frac{f(0)}{n+1} - \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} - \dots - \frac{f^{(p)}(0)}{(n+1)\dots(n+p+1)} \right] = 0.$$

c). On prend $p=2$:

i). Déterminer a, b et c tels que: $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} (1 + \varepsilon)$: $\varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

ii). Avec $J_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, trouver α, β, γ tels que:

$$J_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3} (1 + \varepsilon) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0.$$

iii). Si $K_n = \int_0^1 [x^n + (1-x)^n] f(x) dx$: calculer u, v et w tels que:

$$K_n = \frac{u}{n} + \frac{v}{n^2} + \frac{w}{n^3} (1 + \varepsilon) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0.$$

Idee du barème: I: (8,5): 1°: 2,5; 2°: 3; 3°: 3.

II: (4) $p: 1; q: 1,5; r: 1,5$.

III: (7,5) 1°: 3; 2°: 4,5.