

I. On considère l'intégrale :

$$(1) : I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

1°. Montrer que cette intégrale est convergente et que : $I_n = (n-1)I_{n-2}$

Calculer I_n quand n est impair.

2°. En admettant, sans démonstration, que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n quand n est pair.

3°. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P(x) Q(x) dx$ est convergente.

Calculer cette intégrale pour deux polynômes distincts choisis parmi les quatre polynômes $1, X, X^2-1, 3X-X^3$.

II. Soit $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] : d^0 P \leq n\}$.

1°. Soit : $B : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E_n \times E_n : B(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P(x) Q(x) dx.$$

Démontrer que B est une forme bilinéaire symétrique.

Soit Φ la forme quadratique associée à B ; montrer que Φ est définie positive.

2°. Soit $P \in E_n$ tel que : $d^0 P \leq p$: (et $p \leq n$) vérifiant pour tout $q \leq p$: $B[X^q, P] = 0$

Montrer que $P = 0$. (On pourra étudier $B(P, P)$).

3°. Soit $U = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E_n , et M la matrice associée à B dans la base U . Soit m_{ij} l'élément de M situé à la ligne i ($i = \underline{0}, 1, \dots, n$) et à la colonne j : ($j = \underline{0}, 1, \dots, n$).

Démontrer l'égalité $m_{ij} = I_{i+j}$ (où I_n est défini par (1)).

Ecrire M pour $n=4$.