

III. On conserve les notations de II. (feuille 2).

Soit $H_p \in E_n$ vérifiant: a). $d^\circ H_p \leq p$

b). $\forall q \geq 0: q < p: B(X^q, H_p) = 0$; c). $B(X^p, H_p) = (-1)^p p! \sqrt{2\pi}$

1°/ On a évidemment $H_0 = 1$; on suppose $n \geq 4$, calculer H_1, H_2, H_3 .

2°/ - En utilisant II. 2°, démontrer que, s'il existe un polynôme H_p possédant les propriétés a, b, c, il est unique.

3°/ - Soit $P \in E_n$, défini par: $P(X) = \sum_{q=0}^n d_q X^q$.

Ecrire les conditions que doivent vérifier les d_q pour que P ait les propriétés a, b, c. En déduire l'existence de H_p ; calculer H_4 . On posera, dans la suite: $H_p = \sum_{q=0}^n a_{qp} X^q$.

IV. 1°/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que:

$$\forall q \in \mathbb{N}; q \leq p-2: B(X^q, H_p') = 0.$$

$$\text{et que } B(X^{p-1}, H_p') = (-1)^p p! \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{En déduire: (2) } H_p' + p H_{p-1} = 0.$$

Quel est alors le monôme de plus haut degré de H_p .

2°/ Calculer de même: $B(X^q, H_{p+1} + X H_p)$ d'abord pour

$q \leq p-2$ puis pour $q = p-1$.

$$\text{En déduire: (3) } H_{p+1} + X H_p + p H_{p-1} = 0 \quad \text{pour } p \geq 1.$$

3°/ A partir des relations (2) et (3), démontrer que H_p vérifie l'équation:

$$(4) : H_p'' - X H_p' + p H_p = 0.$$

En déduire, pour $q < p$ une expression du coefficient a_{qp} de H_p .

V. 1°/ Calculer $B(H_p, H_q)$ pour $p \neq q$; puis $\Phi(H_p)$.

2°/ Montrer que les polynômes $H_0, H_1, \dots, H_n$ forment une base U' de E . Quelle est la matrice et M' de la forme bilinéaire B relativement à cette base?