

Corrigé du devoir à la maison.

1°) a) On trouve: $f(2x, -2x) = f(x, -x) \cdot \text{ch } x$.

5

b). Par récurrence, on a: $\varphi(x) = \text{ch } \frac{x}{2} \cdot \text{ch } \frac{x}{4} \dots \text{ch } \frac{x}{2^n} \varphi(\frac{x}{2^n})$.

Donc, si $x > 0$ $|\varphi(x)| \leq e^{x(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n})} \cdot |\varphi(\frac{x}{2^n})| \leq e^x \cdot |\varphi(\frac{x}{2^n})| \Rightarrow |\varphi(x)| = 0$ de même si $x < 0$. (1-2)

6

Posons: $\psi(x) = \varphi(x) - \frac{\text{sh } x}{x} \cdot \varphi(0)$ continue en 0, et ψ vérifie $\psi(x) = \text{ch } \frac{x}{2} \cdot \psi(\frac{x}{2})$ donc, $\psi = 0$. c.q.f.d. 4

c). En posant $\varphi(x) = f(x, -x) \Rightarrow f(x, -x) = f(0,0) \frac{\text{sh } x}{x}$.

Or: $f(x, y) = f(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) = e^{-\frac{x+y}{2}} \frac{\text{sh } \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} f(0,0) = \frac{e^{-y} - e^{-x}}{x-y} f(0,0)$ et si $x=y$: $f(x, x) = e^{-x} f(0,0)$ 7

On vérifie alors que: $f(x, y) = f(y, x)$ et que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que f satisfait aux conditions du (1). (1-3)

d) $f(0,0) \neq 0$; $f(x, y)$ est toujours du signe de $f(0,0)$, donc, pour avoir une solution, il faut que: $\alpha = \frac{c}{f(0,0)} > 0$.

Posons: $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$; l'équation devient donc: $e^{-v} \frac{\text{sh } u}{u} = \alpha$.

L'équation d'une droite pourra se mettre sous la forme: $v = au + b$. (On n'aura pas les droites d'équation: $u = a$ mais on vérifie aisément que dans ce cas on a un seul point d'intersection donné par $v = -\log \frac{\alpha a}{\text{sh } a}$ et $u = a$)

Il faut donc étudier le nombre de solutions de l'équation:

(E) $-au - b + \log \frac{\text{sh } u}{u} = \log \alpha$ et en posant $k = b + \log \alpha$ et $g(u) = -au + \log \frac{\text{sh } u}{u}$

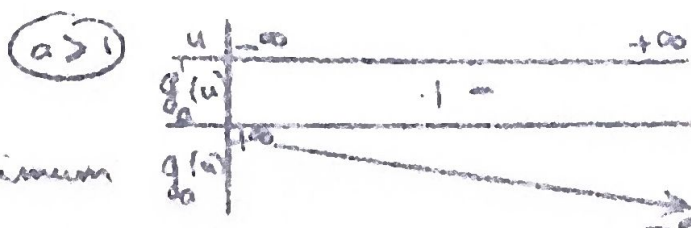
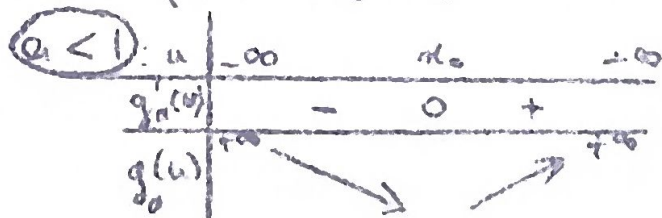
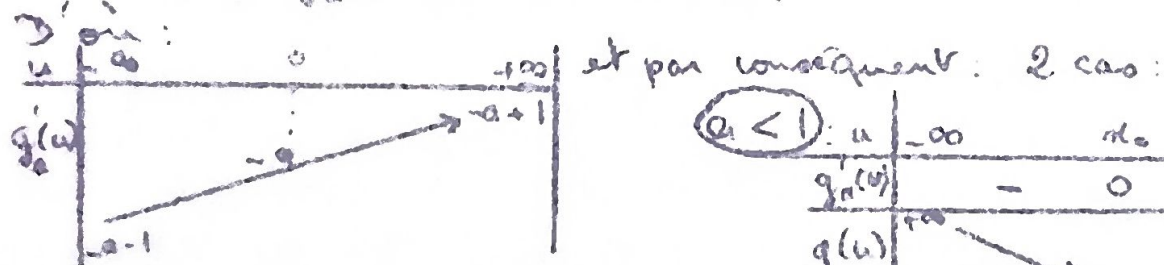
(E) $\Leftrightarrow g(u) = k$; on peut se limiter au cas où $a > 0$ car, si

14

u est solution de (E) $\Leftrightarrow -u$ solution de (E_{-a})

et si $a > 0$ $g'_a(u) = -a + \coth u - \frac{1}{u}$ et $g''_a(u) = \frac{\text{sh}^2 u - u^2}{u^2 \text{sh}^2 u} > 0$.

(On prolonge $g'_a(u)$ par cont. en 0).



En conclusion, on a au maximum 2 points d'intersection.