

2°) a) pas de problèmes.

[7]

b). $A(x,y) = \sup | \Psi(\varepsilon x, \varepsilon' y) | \quad \varepsilon = \pm 1; \varepsilon' = \pm 1.$

En utilisant cette remarque et la relation (3), on trouve bien l'inégalité demandée.

[7]

Par un raisonnement analogue à celui du 1°), on peut dire que : si $g(0,0) = 0$ alors $g = 0$.

c). $1 - e^{-x} = 1 - (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \Rightarrow h(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x) \Rightarrow h'(0) = -\frac{1}{2}$ [4]

d). On a immédiatement : $h(x,y)$ continue si $x \neq y$ [2]

Si $x = y$, comme h est continue : $(x,y) \rightarrow (a,a)$ alors :

$h(x,y) - h'(a) = h(z) - h'(a) \quad z \in]x,y[$. donc, lorsque

$(x,y) \rightarrow (a,a)$, $z \rightarrow a$ et on a bien la continuité de h sur $\mathbb{R}^2$.

[6]

[16]

d. P.P.S.

h vérifie (3) : on montre (par le calcul) que la relation est vérifiée si $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ puis, en utilisant la continuité que l'on vient de montrer, on obtient le résultat pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

[10]

e). On a : $h(0,0) = -\frac{1}{2}$. d'où : $g(x,y,z) = -e^{-z} \cdot 2g(0,0,0)h(x-z,y-z)$

d'où l'expression : $g(x,y,z) = -2g(0,0,0) \frac{(y-z)e^{-x} + (z-x)e^{-y} + (x-y)e^{-z}}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ [3]

g est bien continue sur $\mathbb{R}^3$

g vérifie i) et ii) (à cause de l'expression que l'on vient de trouver) + iv), because la continuité de h .
Montrons que g vérifie iii).

On a : $h(x) - h(y) = h(\frac{x+y}{2}) - h(y) + h(x) - h(\frac{x+y}{2})$

[4]

$\Leftrightarrow 2 \frac{h(x) - h(y)}{x - y} = \frac{h(\frac{x+y}{2}) - h(y)}{\frac{x+y}{2} - y} + \frac{h(x) - h(\frac{x+y}{2})}{x - \frac{x+y}{2}}$

[10]

$\Leftrightarrow 2 h(x,y) = h(\frac{x+y}{2}, y) + h(x, \frac{x+y}{2})$

en posant : $x = x_1 - x_3$; $y = x_2 - x_3$ et en multipliant la dernière égalité par $-e^{-x_3} \cdot 2g(0,0,0)$, on trouve : iii) *

On a donc trouvé toutes les fonctions vérifiant (2)

(en effet : une fonction vérifiant (2) est déterminée de manière unique par sa valeur en $(0,0,0)$, donc, l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, ce que l'on vient de trouver).

[3]

* Ceci est valable pour $x_1 \neq x_2$ (i.e. $x \neq y$) mais en utilisant la symétrie on obtient bien tous les cas.

PS: dans le 2°) d), pour montrer que h vérifie (3) on peut montrer que g définie au (e) vérifie i, ii, iii, iv puis utiliser le 2°) b).

PPS: oubli: vérification de (3) : si $x = y$: -3 ; si $x = 0, y \neq 0$ ou $y = 0, x \neq 0$: -2.