

II.3. Les quatre exercices sont indépendants.

- I. 1°) Résoudre l'équation différentielle $2u' - 2u^2 - 1 = 0$.
 2°) Résoudre l'équation différentielle $2ff'' - 4f'^2 - f^2 = 0$,
 en utilisant successivement les deux méthodes suivantes:
 a) en effectuant le changement de fonction $u = \frac{f'}{f}$;
 b) en effectuant le changement de fonction $v = \frac{1}{f}$.

II. A tout couple (α, λ) de nombres on associe la fonction f définie par $f(\theta) = \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha)}$ et la courbe $C_{\alpha, \lambda}$ dont l'équation en coordonnées polaires est $r = f_{\alpha, \lambda}(\theta)$.

- 1°) Par quelle transposition la courbe $C_{\alpha, \lambda}$ se déduit-elle de la courbe $C_{\alpha, 1}$?
 2°) Soit $\mathcal{C}$ la restriction de $C_{\alpha, 1}$ définie par $\theta \in [-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}]$. Tracer $\mathcal{C}$, en précisant les branches infinies, ainsi que les points doubles.
 3°) Déterminer le cercle osculateur à $\mathcal{C}$ au point d'angle polaire $\theta = 0$.

III. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien. Un arc de courbe rectifiable $(\mathcal{A})$ est défini par une représentation paramétrique, les coordonnées du point générique $M(u)$, x et y étant des fonctions de classe C^1 d'un paramètre u . On désigne par s l'abscisse curviligne sur $(\mathcal{A})$ orienté dans le sens de u croissant. On rappelle que: $\vec{t} = \frac{d(\vec{OM})}{ds}$ est le vecteur normé directeur de la tangente en M à $(\mathcal{A})$ définissant sur la tangente une orientation conforme à celle de $(\mathcal{A})$, φ désignant une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{t})$, on pose $\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{d\varphi}$, le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{t}$, enfin R est le rayon de courbure algébrique de $(\mathcal{A})$ en M .

Soient X et Y les coordonnées de OM dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$, on exprimera x et y en fonction de X, Y , et X, Y en fonction de x, y .

On désigne enfin par:

- ($\mathcal{B}$) l'ensemble des points H définis par $OH = Y\vec{n}$,
 ($\mathcal{C}$) l'ensemble des points K définis par $OK = X\vec{t}$,
 ($\mathcal{D}_\lambda$) l'ensemble des points L définis par $ML = \lambda\vec{t}$, (λ réel donné).
 1°) Établir les relations: $dX = (1 + \frac{Y}{R})ds$, $dY = -X \frac{ds}{R}$, pour $R \neq 0$.
 2°) Déterminer les courbes ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{B}$), ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{D}_\lambda$), lorsque $(\mathcal{A})$ est définie par $x = 1 - \cos u$, $y = \sin u$, $0 \leq u \leq \pi$. Construire ces courbes. (On pourra donner une solution géométrique pour ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{D}_\lambda$) et établir par procédé géométrique l'équation polaire de ($\mathcal{B}$) pour l'étude de ($\mathcal{D}_\lambda$) sur sa représentation paramétrique, on pourra poser $\lambda = \tan \omega$).