

3°) $(\mathcal{A})$ est la courbe définie par la représentation paramétrique:

$$x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 2u - 1), \quad y = \operatorname{sh} u, \quad u \in \mathbb{R};$$

a) Déterminer et construire $(\mathcal{A})$

b) Chercher l'équation polaire de $(\mathcal{A})$: $r = f(\theta)$, avec $\theta = (\vec{i}, \vec{n})$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$, construire cette courbe.

c) Déterminer l'équation polaire de $(\mathcal{C})$, $r = g(\theta)$, avec $\theta = (\vec{i}, \vec{t})$, $0 < \theta < \pi$; chercher une relation entre le paramètre u du point M et le paramètre u_1 du point M_1 où la droite OK recoupe la courbe $(\mathcal{A})$, montrer que $u_1 - u$ a une limite finie lorsque u tend vers $+\infty$, en déduire la limite lorsque u tend vers $+\infty$ du rapport des abscisses curvilignes de M_1 et de M sur $(\mathcal{A})$. Quelle est dans ces conditions la limite du rapport des normes des vecteurs $\vec{OM}_1$ et $\vec{OK}$? Donner l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$.

IV. Dans le plan euclidien orienté on considère le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et le cercle (C) de centre O de rayon 1. Soit M le point du cercle tel qu'une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{OM})$ soit égale à θ et soit Q la projection orthogonale de M sur $y'Oy$. A tout réel θ on associe le point P de coordonnées $(\theta, f(\theta))$ où f désigne une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On désigne par Γ la

courbe de représentation paramétrique: $x = \cos \theta$, $y = f(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1°) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite QP soit tangente à Γ au point P pour tout θ , est que la fonction f soit solution de l'équation différentielle:
 $y' \cos \theta + y \sin \theta = \sin^2 \theta$.

2°) Déterminer parmi les solutions de cette équation celle pour laquelle la courbe correspondante passe par le point de coordonnées $(1, 0)$ pour $\theta = 0$. On désigne dans toute la suite cette courbe par Γ .

3°) Déterminer les points stationnaires de Γ et montrer que les tangentes en ces points passent par un point fixe que l'on déterminera.

4°) Tracer l'arc de courbe de Γ correspondant à $\theta \in \left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$.

5°) Pour $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), calculer le rayon de courbure de Γ en M , puis déterminer une équation que vérifie nécessairement θ pour qu'au point M le rayon de courbure présente un extremum sur $]0, \pi[$. Montrer qu'il existe dans cet intervalle un tel point M unique.