

I. On considère la fonction numérique f_λ définie par :

$$f_\lambda(x) = \lambda(x^2 + 1)^{3/2} + x + \frac{2}{3}x^3.$$

Soit C_λ sa courbe représentative dans 1 repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que, au voisinage de $+\infty$, puis au voisinage de $-\infty$:

$$f_\lambda(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2°/ Montrer que les courbes C_λ et $C_{-\lambda}$ se déduisent l'une de l'autre par une transformation simple que l'on précisera.

On se limitera dans toute la suite à $\lambda \geq 0$.

3°/ Etudier, suivant $\lambda \geq 0$, le sens de variation de f_λ (+ limites).
(Résoudre l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ dans la mesure où l'on cherchera à expliciter la solution).

4°/ Tracer la courbe correspondant à $\lambda = \frac{3}{2}$.

5°/ Pour des valeurs de λ que l'on précisera, la courbe C_λ présente un point dont la tangente est parallèle à x ou y . Déterminer l'ensemble (T) de ces points. Tracer (T) .

6°/ Pour certaines valeurs de λ que l'on déterminera, la courbe C_λ admet un point d'inflexion. Déterminer l'ensemble (I) de ces points. Tracer (I) .

7°/ Donner l'allure dans un même repère des différentes formes des courbes C_λ ($\lambda \geq 0$). On précisera leurs positions respectives.
Enser A3 75 (partiel).

II. Soit les fonctions d'une variable réelle définies par :

$$y_1(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{-x}} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right) \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$y_2(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \quad \text{pour } x > 0.$$

1°/ Trouver les développements limités, à l'ordre n , de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ dans des voisinages convenables de 0. (On pourra chercher 1 D.L. de $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ en dérivant cette fonction).

2°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} y_1(x)$.