

Etude d'une cubique:

$$f: x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}.$$

1°/ Etudier f , rechercher les B.I., tracer la courbe représentative de $f(C)$; montrer que (C) a trois points d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2°/ On veut chercher une condition sur x_1, x_2, x_3 pour que les points M_1, M_2, M_3 de (C) , d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 soient alignés:

a) déterminer l'équation du 3^{ème} degré obtenue en cherchant l'intersection de (C) et de la droite (d) d'équation: $ux + vy + w = 0$

b) Éliminer u, v, w entre les expressions de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, x_3 ; on obtient alors une condition nécessaire portant sur $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ pour que M_1, M_2, M_3 soient alignés.

c) montrer que cette condition est suffisante: écrire l'équation de la droite d'alignement passant par M_1 et M_2 et qui recoupe (C) en M'_3 et montrer que $M'_3 = M_3$ (défini par la b).

3°/ Retrouver l'équation donnant les abscisses des 3 p^{ts} d'intersection d'inflexion de (C) en utilisant le fait que la tangente en l'un de ces points coupe la courbe (C) en 3 p^{ts} confondus (solution triple). En déduire que les trois points d'inflexion sont alignés; écrire l'équation de la droite d'alignement.

4°/ Chercher l'abscisse x du point d'intersection de la tangente à (C) en point M_0 d'abscisse x_0 et de la courbe (C) .