

## SPÉCIALE MP\* : DEVOIR SURVEILLÉ

Vu les commentaires des jurys des concours, on demande dans ce devoir de faire

- un effort de présentation :
  - écrire lisiblement,
  - mettre en évidence les résultats (les souligner ou les encadrer, les dégager),
- un effort de rédaction :
  - bien justifier les théorèmes utilisés,
  - bien structurer les arguments (revenir à la ligne pour chacun d’entre eux),
- et aussi un effort de concision.

Dans tout le problème, sauf indication contraire,  $E$  désigne un espace de Banach réel (i.e. un espace vectoriel réel normé complet) de dimension infinie. On notera  $E'$  l’ensemble des formes linéaires continues sur  $E$  muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Pour simplifier les notations, toutes les normes utilisées sur les différents espaces vectoriels seront notées de la même manière  $\|\cdot\|$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite (infinie) de vecteurs non nuls de  $E$ . On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $x_n$  et  $\overline{F}$  son adhérence dans  $E$ . L’espace  $\overline{F} = G$  sera appelé “le sous-espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs  $x_n$ ”.

On dira que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est **basique** si pour tout vecteur  $x \in \overline{F}$ , il existe une suite **unique**

$(a_n)_{n \geq 1}$  de réels telle que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$  converge dans  $E$  et soit de somme  $x$ .

Enfin on dira que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  **vérifie la condition (\*)** si

$$\exists K > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Les cinq parties sont, dans une large mesure, indépendantes. La partie IV utilise le résultat final de la partie III et la partie V utilise les résultats des parties II et IV.

### PREMIÈRE PARTIE

On se propose de montrer ici que  $E$  contient une suite infinie de vecteurs non nuls vérifiant (\*).

Soient  $x_1, \dots, x_n$   $n$  vecteurs de  $E$  vérifiant

$$\exists C > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q \leq n, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé, on notera  $E_n$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $x_1, \dots, x_n$ ,  $S_n$  la sphère unité de  $E_n$  et  $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ .

**On admettra dans cette partie les deux résultats suivants :**

- Il existe  $z_1, \dots, z_M$  appartenant à  $S_n$  tels que

$$\forall z \in S_n, \exists j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \|z - z_j\| \leq \delta$$

- Pour tout  $z \in E$  tel que  $\|z\| = 1$ , il existe  $\varphi \in E'$  tel que  $\|\varphi\| = 1$  et  $\varphi(z) = 1$ . Ainsi  $\forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket, \exists \varphi_k \in E', \|\varphi_k\| = 1, \varphi_k(z_k) = 1$ .

**I.1.** Montrer par l’absurde qu’il existe  $x_{n+1} \in E, \|x_{n+1}\| = 1$  et tel que  $x_{n+1} \in \bigcap_{k \in \llbracket 1, M \rrbracket} \text{Ker } \varphi_k$ .

**I.2. a.** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$   $n + 1$  réels tels que  $\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| = 1$ .

Montrer, en choisissant  $j_0 \in \llbracket 1, M \rrbracket$  et en calculant et majorant  $\varphi_{j_0}(z_{j_0} + \alpha_{n+1}x_{n+1})$ , que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \right\| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

**b.** Montrer que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q \leq n + 1, \forall (a_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq C(1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

**I.3.** Montrer, en choisissant  $\varepsilon = \varepsilon(n)$  convenablement et en raisonnant par récurrence, qu'il existe une suite infinie de vecteurs non nuls de  $E$  vérifiant (\*).

## DEUXIÈME PARTIE

Question préliminaire : Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces de Banach,  $F \subset E_1$  un sous-espace vectoriel dense dans  $E_1$  et  $T : F \rightarrow E_2$  une application linéaire continue.

Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire continue  $\tilde{T} : E_1 \rightarrow E_2$  prolongeant  $T$  (i.e. telle que pour tout  $x \in F$ ,  $T(x) = \tilde{T}(x)$ ).

Vérifier que  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de vecteurs non nuls de  $E$  vérifiant (\*) (avec une constante  $K$ ). On note

$$H = \left\{ x \in E \mid \exists (a_n)_{n \geq 1}, a_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\}$$

et on munit  $H$  de la norme induite par  $E$ .

**II.1.** Montrer que pour tout  $x \in H$ , la suite  $(a_n)$  intervenant dans la définition de  $x$  comme élément de  $H$  est unique.

**II.2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $P_n : H \rightarrow E$  par  $P_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ .

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|P_n\| \leq K$  et que  $(P_n)_{n \geq 1}$  est une famille de projecteurs linéaires dont on précisera l'image.

Dans toute la suite de cette partie,  $F$  et  $G = \overline{F}$  désignent respectivement le sous-espace vectoriel et le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendrés par la suite  $(x_n)$ .

**II.3.** En remarquant que  $F \subset H \subset G$  et en utilisant la question préliminaire, montrer que  $P_n$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue  $\tilde{P}_n$  de  $G$  dans l'image de  $P_n$ .

Montrer que

$$\forall x \in G, \tilde{P}_n(x) \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

**II.4.** Montrer que pour tout  $x \in G$

$$x = \tilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x)).$$

En déduire que  $G = H$  et conclure.

## TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel normé. Deux joueurs, Pierre et Paul jouent au jeu suivant :

- Pierre choisit un ouvert  $U_1 \neq \emptyset$  de  $E$  puis Paul choisit un ouvert non vide  $V_1 \subset U_1$ .
- Pierre choisit alors un ouvert non vide  $U_2 \subset V_1$  et ainsi de suite.

À la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides  $(U_n)_{n \geq 1}$  et  $(V_n)_{n \geq 1}$  telles que

$$\forall n \geq 1, U_{n+1} \subset V_n \subset U_n.$$

**III.1. a.** Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ .

Notons  $U$  cet ensemble. Pierre a gagné la partie si  $U$  est vide et Paul si  $U$  n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner quel que soit la façon de jouer de son adversaire. Remarquons qu'il n'est pas certain a priori que l'un des deux joueurs en ait une.

**b.** On suppose que l'espace  $E$  est une réunion dénombrable de fermés  $F_n$  d'intérieur vide. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante.

Indication : Pierre commence à jouer  $U_1 = E$  et à chaque choix de  $V_n$  de Paul, Pierre répond  $V_n \setminus F_n$ .

**c.** Montrer que si  $E$  est complet alors Paul a une stratégie gagnante.

Indication : on rappelle le résultat suivant : si  $(F_n)$  est une suite décroissante de fermés non vides de  $E$  dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des  $F_n$  est non vide.

**d.** En déduire qu'un espace de Banach ne peut pas être égal à une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Dans toute la suite de cette partie,  $E$  et  $F$  désignent deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et bijective. On convient de noter, dans un espace vectoriel normé  $X$ ,  $B(x_0, r)$  la boule ouverte de centre  $x_0 \in X$  et de rayon  $r$  et pour une partie  $C$  de  $X$ ,  $\overline{C}$  son adhérence dans  $X$ .

**III.2. a.** On pose  $X_n = \overline{nT(B(0, 1))} = \{y \in F \mid \exists x \in \overline{T(B(0, 1))}, y = nx\}$ .

Montrer que  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = F$ .

**b.** En déduire qu'il existe  $c > 0$  et  $y_0 \in F$  tels que  $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0, 1))}$ .

**c.** Montrer que  $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0, 1))}$ .

**d.** Soit  $y \in F$  vérifiant  $\|y\| < c$ . Construire une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  vérifiant

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ et } \|y - T(z_1 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

**e.** Montrer que la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = z_1 + \dots + z_n$  est convergente dans  $E$  vers  $x = T^{-1}(y)$ .

**f.** Montrer que  $T^{-1}$  est continue.

## QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie,  $E$  est un espace de Banach de dimension infinie et  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite basique d'éléments de  $E$ . Soit  $A$  l'ensemble des suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  de réels telles que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$  converge dans  $E$ . On munit l'espace vectoriel  $A$  de la norme  $\|(a_n)\|_A = \sup_{N \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\|$ .

**IV.1.** Montrer que  $A$  muni de la norme  $\|\cdot\|_A$  est un espace de Banach.

On note  $G$  le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $(x_n)_{n \geq 1}$  et on définit l'application linéaire  $\Phi : A \rightarrow G$  par  $\Phi((a_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ .

**IV.2. a.** Montrer que  $\Phi$  est continue et bijective.

**b.** En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  vérifie la condition (\*).

## CINQUIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère un espace de Banach  $E$  de dimension infinie et une suite basique  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  de **norme 1**. La suite  $(x_n)$  vérifie donc la condition (\*) avec une constante  $K$ . On note  $G$  le sous-espace fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $x_n$ . On considère enfin une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $E$  telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n - y_n\| = \frac{1}{2L} < \frac{1}{2K}.$$

**V.1. a.** Montrer que pour tous  $1 \leq p \leq q \in \mathbb{N}$ ,  $\max_{p \leq k \leq q} |a_k| \leq 2K \left\| \sum_{k=p}^q a_k x_k \right\|$ .

**b.** Montrer que  $\left\| \sum_{k=p}^q a_k y_k \right\| \leq 2 \left\| \sum_{k=p}^q a_k x_k \right\|$  et  $\left\| \sum_{k=p}^q a_k x_k \right\| \leq \frac{L}{L-K} \left\| \sum_{k=p}^q a_k y_k \right\|$ .

**c.** Montrer que pour toute suite réelle  $(a_k)$ , la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$  converge dans  $E$  si et seulement si la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$  converge dans  $E$ .

**d.** Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k y_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^q a_k y_k \right\|.$$

On note  $Y$  le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $y_n$ .

**e.** Montrer que l'application  $T : G \rightarrow Y$  définie par  $T \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$  est un isomorphisme linéaire continu ainsi que son inverse.

On suppose maintenant que  $G = E$  et on note  $\text{Id}$  l'application identité de  $E$ . Pour tout  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \in E$ , on pose  $T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$  et  $u(x) = x - T(x)$ . On note  $u^0 = \text{Id}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$   $k$  fois.

**V.2. a.** Montrer que  $\|u\| < 1$ .

**b.** Montrer que pour tout  $x \in E$ , la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k(x)$  converge dans  $E$  et que sa somme

$S(x)$  définit une application linéaire continue  $S$  telle que  $S \circ T = T \circ S = \text{Id}$ .

**c.** Déterminer l'espace  $Y$ .